Combinatoria

He recopilado aquí ejercicios de tres objetos combinatorios: el polinomio cromático, el triángulo de Pascal, y los números de Catalan.

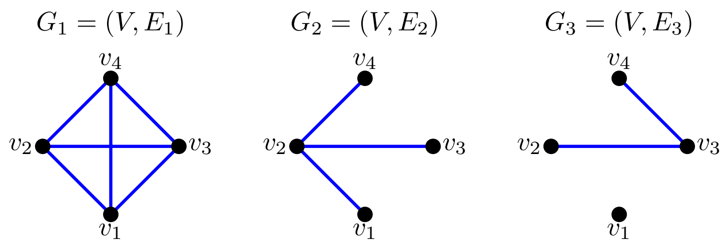
1 El polinomio cromático

Empecemos definiendo algunos conceptos. Todos sabéis ya (más o menos) lo que es un grafo. Formalmente, un **grafo** G es una pareja (V, E) donde $V = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_k\}$ es un conjunto de vértices (o **nodos**) $E = \{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}$ es un conjunto de **aristas** (en inglés, *edges*). Una arista es una palabra de dos nodos, indicando que ambos nodos están conectados. Por ejemplo, $e_1 = v_1v_2$ es la arista que une v_1 con v_2. Otra forma de escribirlo es $e_1 = (v_1 \to v_2)$, aunque aquí el orden no importa; $e_1 = (v_2 \to v_1)$ también.

Pongamos un ejemplo: sea $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y sean

$$\begin{cases} E_1 = \{\underbrace{v_1v_2}_{e_1}, \underbrace{v_1v_3}_{e_2}, \underbrace{v_1v_4}_{e_3}, \underbrace{v_2v_3}_{e_4}, \underbrace{v_2v_4}_{e_5}, \underbrace{v_3v_4}_{e_6}\}, \\ E_2 = \{v_1v_2, v_2v_3, v_2v_4\} = \{e_1, e_4, e_5\}, \\ E_3 = \{v_2v_3, v_3v_4\} = \{e_4, e_6\}. \end{cases}$$

Entonces, tenemos los grafos siguientes:



Algunos árboles tienen nombres especiales: si toda pareja de nodos está conectada por una arista, entonces decimos que el grafo es **completo** y lo llamamos K_d, donde d es el número de nodos. En el ejemplo anterior, $G_1 = K_4$. Un grafo es **conexo** si existe un camino de nodos que pase por todos ellos (se pueden repetir aristas). En el ejemplo, G_1 y G_2 son conexos, pero G_3 no.

Un **ciclo** es un subconjunto de aristas tales que podemos encadenarlas y terminen en el mismo sitio donde empezaron. Por ejemplo, G_1 tiene el ciclo $\{e_1, e_2, e_5, e_6\}$, ya que

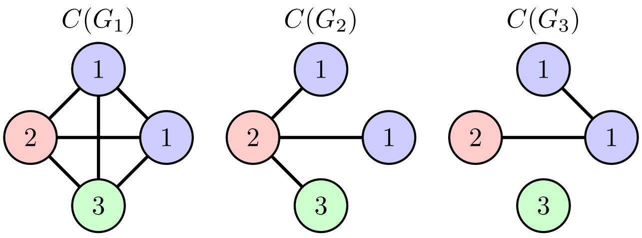
$$v_1 \xrightarrow{e_1} v_2 \xrightarrow{e_5} v_4 \xrightarrow{e_6} v_3 \xrightarrow{e_2} v_1.$$

Un grafo conexo que no tiene ningún ciclo es un **árbol**, por ejemplo, G_2, pero no G_3.

Algo muy importante en la teoría de grafos es la coloración. Una **coloración** de G es una función C que asigna un color a cada nodo. Diremos que es una n-coloración si usa n colores o menos. En un arrebato de originalidad, llamaremos a los colores "color 1", "color 2", etc. De hecho, ni siquiera diremos la palabra "color". Ejemplo: si C es la función

$$C(v_1) = 3 \quad ; \quad C(v_2) = 2 \quad ; \quad C(v_3) = 1 \quad ; \quad C(v_4) = 1,$$

entonces tenemos las siguientes 3-coloraciones de los grafos G_1, G_2 y G_3:



¡Por cierto! Estas también son 4-coloraciones, y 5-coloraciones, etc., porque usan menos de 4 colores, menos de 5, etc.

Una coloración es **buena** si cada arista une dos nodos con colores diferentes. Por ejemplo, C es una coloración buena para G_2, pero no para G_1 ni para G_3, porque $e_6 = (v_3 \to v_4)$ une dos nodos con el mismo color (en este caso, el color 1).

Pues bien, el **polinomio cromático** de G es la función

$$P_G(n) = \text{ número de } n\text{-coloraciones buenas de } G.$$

Ejercicio 1. Calcula $P_{K_d}(n)$ para cualesquiera $d, n \geq 1$. *(Cuidado: d es el número de nodos y n el número de colores).*

Solución: Si $d = 1$, entonces G tiene un solo nodo. ¿Cuántas formas hay de colorear un nodo con n colores? Pues n.

Si $d > 1$, entonces todo par de nodos está conectado por aristas (por definición de K_d). Pero entonces, para que nuestra coloración sea propia, necesitamos al menos d colores, uno para cada nodo. Luego $P_{K_d}(n) = 0$ si $d < n$. Y si tenemos $n \geq d$ colores, entonces v_1 podrá colorearse con uno de los n colores diferentes. Luego, v_2 podrá colorearse con uno de los $(n-1)$ colores que quedan (porque si $C(v_1) = C(v_2)$, la coloración no es buena). Ahora, v_3 puede colorearse con uno de los $(n-2)$ colores que quedan (para que no sea el de v_1 ni el de v_2). Seguimos con este razonamiento hasta encontrar que

$$P_{K_d}(n) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-d+1).$$

Alternativamente, usando números combinatorios, la respuesta sería la siguiente: elijo d colores entre n posibilidades, y después tendré $d!$ formas de asignárselos a los nodos, luego

$$P_{K_d}(n) = d! \cdot \binom{n}{d} = d! \frac{n!}{d!(n-d)!} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-d+1).$$

■

Ejercicio 2. Si G es un árbol de d nodos, calcula $P_G(n)$ para todo $n \geq 1$.

Solución: Elegimos un color para el primer nodo, v_1; tenemos n opciones. A partir de ahora, elegiremos un nodo que tenga exactamente un vecino coloreado y lo colorearemos. Este proceso terminará coloreando todos los nodos (porque G es un árbol). En cada turno, tenemos $n-1$ colores disponibles para que la coloración sea buena. Como son d nodos, será

$$P_G(n) = n \underbrace{(n-1)(n-1)\cdots(n-1)}_{d-1 \text{ veces}} = n(n-1)^{d-1}.$$

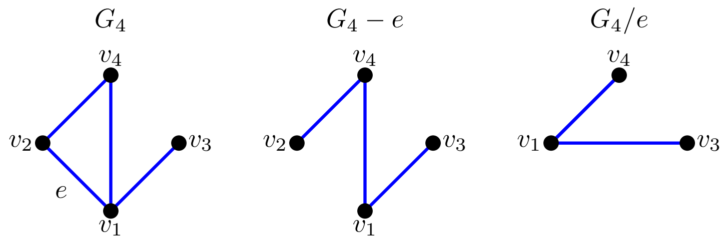
¿Esto funciona para todo n? Dejo como ejercicio comprobar qué pasa si hay muy pocos colores (1 ó 2, ...), o muy pocos nodos. *En matemáticas, estos se llaman los "casos base".*

■

Pero aquí hay algo raro: hemos llamado a $P_G(n)$ el *polinomio* cromático. ¿Es $P_G(n)$ un polinomio? Sí, aunque no es evidente. Ejemplo:

$$P_{G_3}(n) = n \cdot n \cdot (n-1)^2 = n^4 - 2n^3 + 2n.$$

Para probar que esto siempre es así, vamos a usar el método de *Eliminación-Contracción.* Si tengo un grafo G, el denotamos por $G - e$ al grafo resultante de eliminar la arista e (grafo de **eliminación**), y denotamos por G/e al grafo resultante de contraer la arista e (grafo de **contracción**). Eliminar una arista es exactamente lo que estás imaginando; si $G = (V, \{e, e_1, e_2, ..., e_k\})$ entonces $G - e = (V, \{e_1, e_2 ..., e_k\})$. Contraer una arista $e = (v_1 \to v_2)$ significa hacer $v_1 = v_2$, y cambiar todas las aristas $v_2 v_i$ por $v_1 v_i$. En particular, V pasa a ser $V - v_1$, es decir, a tener un nodo menos. Ejemplo:



Ejercicio 3. (Fórmula de Eliminación-Contracción) Prueba que, para todo grafo $G = (V, E)$, para cualquier arista e de E, y para todo $n \geq 1$, se tiene

$$P_G(n) = P_{G-e}(n) - P_{G/e}(n).$$

Solución: Digamos que $e = (v_1 \to v_2)$. Una coloración buena de G es una coloración buena de $G - e$ que tal que $C(v_1) \neq C(v_2)$. Es decir, una coloración buena de G es una coloración de $G - e$ que no es coloración de G/e. Esto prueba el resultado.

■

Ejercicio 4. Prueba que $P_G(n)$ es un polinomio. *(Si quieres una pista, mira al final del pdf.)*

Solución: Sea G un grafo de d nodos. Por inducción sobre el número de aristas de G. Si E tiene 0 aristas, entonces $P_G(n) = n^d$.

Supongamos que el resultado es cierto para todo grafo con menos de k aristas, y sea G un grafo de k aristas. Entonces, $P_G(n) = P_{G-e}(n) - P_{G/e}(n)$. Como $G - e$ tiene $k - 1$ aristas, $P_{G-e}(n)$ es un polinomio. Y como G/e tiene, como mucho, $k - 1$ aristas, entonces $P_{G/e}(n)$ también. La suma de polinomios es polinomio, terminando la prueba.

■

Recuerda: en un polinomio,

$$a_k \; n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_2 n^2 + a_1 n + a_0 \; .$$

- El grado es k
- El coeficiente líder es a_k
- El término libre es a_0

Ejercicio 5. Sea G un grafo de d nodos. Prueba que el grado del polinomio $P_G(n)$ es d.

Solución: Sea G un grafo de d nodos. Por inducción sobre el número de aristas de G. Si E tiene 0 aristas, entonces $P_G(n) = n^d$, que es un polinomio de grado d.

Supongamos que el resultado es cierto para todo grafo con menos de k aristas, y sea G un grafo de k aristas. Entonces, $P_G(n) = P_{G-e}(n) - P_{G/e}(n)$. Como $G - e$ tiene $k - 1$ aristas, $P_{G-e}(n)$ es un polinomio de grado d (tiene el mismo número de nodos). Y como G/e tiene, como mucho, $k-1$ aristas, entonces $P_{G/e}(n)$ es un polinomio de grado $d-1$ (porque tiene $d-1$ nodos). La suma de un polinomio de grado d y otro de grado $d-1$ es un polinomio de grado d, terminando la prueba.

■

Ejercicio 6. Prueba que el coeficiente líder de $P_G(n)$ es 1 y el término libre es 0. *(Nota: para calcular el término libre,* ***no*** *se puede decir que es "el número de 0-coloraciones buenas de G", ya que eso no está bien definido.)*

Solución: Sea G un grafo de d nodos. Por inducción sobre el número de aristas de G. Si E tiene 0 aristas, entonces $P_G(n) = n^d$, que es un polinomio con coeficiente líder 1 y término libre 0.

Supongamos que el resultado es cierto para todo grafo con menos de k aristas, y sea G un grafo de k aristas. Entonces, $P_G(n) = P_{G-e}(n) - P_{G/e}(n)$. Como hemos visto en el ejercicio anterior, el coeficiente líder será el mismo que el de $P_{G-e}(n)$, que es 1 por hipótesis de inducción. Y el término libre será la diferencia de los términos libres de $P_{G-e}(n)$ y $P_{G/e}(n)$, luego será $0 - 0 = 0$, terminando la prueba.

■

Ejercicio 7. Prueba que los signos de los coeficientes de $P_G(n)$ van alternando: si $P_G(n) = n^d + a_{d-1}n^{d-1} + \cdots + a_2n^2 + a_1n$, entonces a_{d-1} es negativo, a_{d-2} es positivo, a_{d-3} es negativo, etc. *(Realmente, deberíamos decir que a_{d-1} es no–positivo, a_{d-2} es no–negativo, etc., ya que pueden ser 0.)*

Solución: Sea G un grafo de d nodos. Por inducción sobre el número de aristas de G. Si E tiene 0 aristas, entonces $P_G(n) = n^d$, que cumple la tesis de alternancia de signos.

Supongamos que el resultado es cierto para todo grafo con menos de k aristas, y sea G un grafo de k aristas. Entonces, $P_G(n) = P_{G-e}(n) - P_{G/e}(n)$. Como $G - e$ tiene d nodos y G/e tiene $(d-1)$ nodos, y como tienen menos de k aristas, por hipótesis de inducción, se tiene

$$\begin{array}{cccc} n^d & -b_{d-1}n^{d-1} & +b_{d-2}n^{d-2} & +\cdots \\ -(& n^{d-1} & -c_{d-2}n^{d-2} & +\cdots) \\ \hline n^d & +a_{d-1}n^{d-1} & +a_{d-2}n^{d-2} & +\cdots \end{array}$$

(donde los b_i y los c_i son todos no–negativos.) Esto prueba que los a_i van alternando en signo.

■

Ejercicio 8. Si G es un grafo que es la unión de K grafos conexos, prueba que el coeficiente más pequeño de $P_G(n)$ que es distinto de 0 es el coeficiente de n^K. *(Notación: cada uno de los subgrafos conexos que forman G se llaman* ***componentes conexas*** *de G.)*

Solución: Sea G un grafo de d nodos. Por inducción sobre el número de aristas de G. Si E tiene 0 aristas, entonces tiene d componentes conexas. Luego $P_G(n) = n^d$ cumple el enunciado.

Supongamos que el resultado es cierto para todo grafo con menos de k aristas, y sea G un grafo de k aristas. Entonces, $P_G(n) = P_{G-e}(n) - P_{G/e}(n)$. Si G tiene K componentes, entonces G/e tiene exactamente K componentes y $G - e$ tiene *a lo sumo* K componentes. Luego el menor coeficiente no nulo será el coeficiente de n^K por hipótesis de inducción.

■

Ahora que sabemos (entre otras cosas) que lo que tenemos es un polinomio, nos preguntamos cómo es el polinomio. Hasta el momento, sólo hemos trabajado con los valores que toma P_G en $n = 1, 2, 3, ...$ (y en el Ejercicio 6, en $n = 0$), pero también podemos conocer los valores en $n = -1, -2, -3, ...$ Esto ya no significará el número de coloraciones buenas con -1 ó -2 colores, obviamente. Pero le buscaremos un significado más adelante.

Ejercicio 9. Sea G un grafo de d nodos. Prueba que $(-1)^d P_G(-n) > 0$ para todo $n \geq 1$.

Solución: Sea G un grafo de d nodos. Por inducción sobre el número de aristas de G. Si E tiene 0 aristas, entonces $P_G(n) = n^d$. Luego $(-1)^d P_G(-n) = (-1)^d(-n)^d = n^d > 0$.

Supongamos que el resultado es cierto para todo grafo con menos de k aristas, y sea G un grafo de k aristas. Entonces, $P_G(n) = P_{G-e}(n) - P_{G/e}(n)$. Por tanto,

$$(-1)^d P_G(-n) = (-1)^d P_{G-e}(-n) - (-1)^d P_{G/e}(-n).$$

Como G/e tiene $d-1$ nodos y menos de k aristas, por hipótesis de inducción,

$$-(-1)^d P_{G/e}(-n) = +(-1)^{d-1} P_{G/e}(-n) > 0.$$

Como $G - e$ tiene menos de k aristas, $P_{G-e}(n) > 0$. Luego

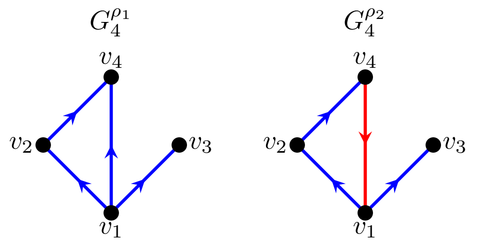
$$(-1)^d P_G(-n) = \underbrace{(-1)^d P_{G-e}(-n)}_{>0} + \underbrace{(-1)^{d-1} P_{G/e}(-n)}_{>0} > 0.$$

■

Un **grafo orientado** es un objeto similar a un grafo, pero en el cual las aristas ahora son flechas. Entonces, ahora $(v_1 \to v_2) \neq (v_2 \to v_1)$. Para construirlo, partimos de un grafo $G = (V, E)$ con una sencilla regla: cada arista estará orientada de menor a mayor. Es decir, $(v_1 \to v_2)$, $(v_1 \to v_3)$, $(v_2 \to v_3)$... serán las flechas. Pero esto nos daría muy poca libertad: no podríamos orientarlas como nos diera la gana. Para ello, definiremos una **orientación** como un conjunto ρ de aristas, que serán las excepciones a la regla de antes. Notaremos al grafo G orientado por ρ como $G^\rho = (V, E, \rho)$. Ejemplo: sea G_4 el ejemplo anterior,

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \quad , \quad E = \{\underbrace{v_1v_2}_{e_1}, \underbrace{v_1v_2}_{e_2}, \underbrace{v_1v_4}_{e_3}, \underbrace{v_2v_4}_{e_5}\},$$

y sean $\rho_1 = \emptyset$, $\rho_2 = \{e_3\}$. Entonces,



Para considerar un camino o un ciclo en un grafo orientado hay que tener en cuenta la dirección de las flechas. Es decir, aunque G_4 tiene un ciclo $(v_1 \to v_2 \to v_4 \to v_1)$, ese ciclo no está en $G_4^{\rho_1}$ (pero sí en $G_4^{\rho_2}$).

Decimos que una coloración C (buena o mala) y una orientación ρ son **compatibles** si todas las flechas van de un color a otro mayor o igual al primero. Notemos que una coloración buena es compatible con una sola orientación. Por tanto, se podría redefinir el polinomio cromático como

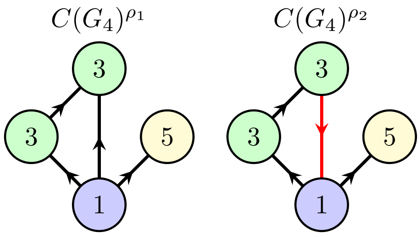
$$P_G(n) = \text{número de pares } (\rho, C) \text{ compatibles, con } C \text{ una}$$
$$n\text{-coloración buena de } G \text{ y } \rho \text{ una orientación de } G.$$

Esto parece inútil ahora mismo, pero nos ayudará a interpretar $P_G(-n)$.

Ejemplo: partiendo de G_4, la coloración

$$C(v_1) = 1 \quad ; \quad C(v_2) = 3 \quad ; \quad C(v_3) = 5 \quad ; \quad C(v_4) = 3,$$

es compatible con la primera pero no con la segunda de las dos orientaciones de antes.



Ejercicio 10. Prueba que la orientación compatible con una coloración buena no tiene ciclos.

Solución: Por reducción al absurdo: Si existiera un ciclo $(v_1 \to v_2 \to v_3 \to \cdots \to v_k \to v_1)$, como la coloración es buena, se tendría $C(v_1) < C(v_2) < C(v_3) < \cdots < C(v_k) < C(v_1)$. En particular, $C(v_1) < C(v_1)$, que es absurdo. Luego no existe ciclo.

■

Es decir,

$$P_G(n) = \text{número de pares } (\rho, C) \text{ compatibles, con } C \text{ una}$$
$$n\text{-coloración } \textbf{buena} \text{ de } G \text{ y } \rho \text{ una orientación sin ciclos de } G.$$

Pues bien, aquí va la sorpresa...

Ejercicio 11. (Teorema de Reciprocidad Combinatoria del Polinomio Cromático) Prueba que

$$(-1)^d P_G(-n) = \text{número de pares } (\rho, C) \text{ compatibles, con } C \text{ una}$$
$$n\text{-coloración de } G \text{ y } \rho \text{ una orientación sin ciclos de } G.$$

(Pista: mira al final del pdf.)

Solución: Sea $Q_G(n) = (-1)^d P_G(-n)$. Entonces, de la fórmula de Eliminación-Contracción, obtenemos

$$Q_G(n) = (-1)^d P_G(-n) = (-1)^d P_{G-e}(-n) + (-1)^{d-1} P_{G/e}(-n) = Q_{G-e}(n) + Q_{G/e}(n)$$

(ver la solución del ejercicio 9).

Sea $R_G(n)$ el número de pares (ρ, C) compatibles, con C una n-coloración de G y ρ una orientación sin ciclos de G. Queremos probar que $Q_G(n) = R_G(n)$.

En primer lugar, probaremos que se verifica $R_G(n) = R_{G-e}(n) + R_{G/e}(n)$, al igual que con la función Q_G. Fijemos una arista $e = (u \to v) = (v \to u)$ de G, y supongamos que conocemos C y ρ en todos los puntos y en todas las aristas salvo en e. Podemos distinguir dos casos:

- Si $C(u) = C(v)$, entonces la arista e puede estar orientada de cualquier manera y ρ seguirá siendo compatible. Luego hay dos pares compatibles (ρ, C) en $R_G(n)$, uno en el que e está en ρ y otro en el que no.

  Por otro lado, si vemos a ρ y a C como orientación y coloración del grafo $G-e$, ya sabemos toda la información sobre ambos. Tenemos un solo par (ρ, C) en $R_{G-e}(n)$.

  Y si vemos ρ y a C como orientación y coloración del grafo G/e también, puesto que allí tampoco existe la arista e (y están bien definidos ρ y C porque $C(u) = C(v)$).

  Resumiendo, dos cosas en $R_G(n)$ corresponden a una cosa en $R_{G-e}(n)$ y a una cosa en $R_{G/e}(n)$.

- Si $C(u) \neq C(v)$, entonces ya sabemos si e está en ρ o no. Hay un solo par (ρ, C) en $R_G(n)$ que cumpla todo lo que le pedimos.

  Por otro lado, viendo el par (ρ, C) en el grafo $G - e$, obtenemos de nuevo que ya está completamente determinado (puesto que no existe la arista e y el resto ya lo conocemos por hipótesis). Luego aquí aparece un solo (ρ, C) cumpliendo todo lo que le pedimos.

  Y esta vez no podemos ver a (ρ, C) en G/e, ya que $C(u) \neq C(v)$, luego no está bien definido C. Por tanto, aquí no hay ningún objeto cumpliendo lo que pedimos.

  Resumiendo, una cosa en $R_G(n)$ corresponde a una cosa en $R_{G-e}(n)$ y a una cosa en $R_{G/e}(n)$.

En definitiva, podemos concluir que $R_G(n)$ y $R_{G-e}(n) + R_{G/e}(n)$ cuentan el mismo número de cosas. Por tanto, son siempre iguales.

Finalmente, vamos a proceder por inducción en el número de aristas de G para concluir. Si G tiene 0 aristas, entonces $Q_G(n) = (-1)^d P_G(-n) = (-1)^d(-n)^d = n^d$ por un lado. Por otro lado, G está formado por puntos aislados, luego la única orientación posible es $\rho = \emptyset$. Es decir, en este caso, $R_G(n)$ cuenta los pares $(\emptyset, C)$, de los cuales hay tantos como n-coloraciones. Todas las coloraciones de nuestro G son buenas, luego $R_G(n) = n^d = Q_G(n)$.

Supongamos que $R_G(n) = Q_G(n)$ para todo grafo con menos de k aristas y sea G un grafo con k aristas. Entonces, por hipótesis de inducción,

$$\begin{array}{ccccccc} Q_G(n) & = & Q_{G-e}(n) & + & Q_{G/e}(n) & & \\ & & \| & & \| & & \\ & & R_{G-e}(n) & + & R_{G/e}(n) & = & R_G(n). \end{array}$$

Esto termina la prueba.

■

1.1 Pistas

Ejercicio 4. Por inducción sobre el número de aristas de G y usando un ejercicio anterior.

Ejercicio 11. Define $Q_G(n) = (-1)^d P_G(-n)$ y prueba que $Q_G(n)$ cumple una fórmula similar a la de Eliminación-Contracción.

Define $R_G(n)$ como el número de pares (ρ, C) compatibles, con C una n-coloración de G y ρ una orientación sin ciclos de G.

Prueba que $R_G(n)$ verifica la misma fórmula que $Q_G(n)$.

Remata por inducción sobre el número de aristas de G.